https://doi.org/10.62753/ctp.2004.13.1.0

Andrzej P. Wilczyński[1]
Politechnika Warszawska, Instytut Mechaniki i Konstrukcji, ul. Narbutta 85, 02-524 Warszawa

MODYFIKACJA LINIOWEJ TEORII LAMINOWANIA

Przedstawiany tekst jest nieco skróconą wersją wykładu wygłoszonego przez Autora w czasie IV Szkoły Kompozytów, Wisła 8-10 grudnia 2003 r. Teoria laminowania, czasami zwana mesomechaniką kompozytów, zajmuje się zazwyczaj przewidywaniem właściwości kompozytu warstwowego, na ogół z warstwami ułożonymi pod różnymi kierunkami, w celu dostosowania tych właściwości do aktualnych wymagań. W przypadku, mających najczęstsze zastosowanie, polimerowych kompozytów włóknistych budowa tej teorii opiera się na liniowej teorii płyt anizotropowych, co znajduje uzasadnienie w fakcie, że konstrukcje kompozytowe wykonuje się przeważnie jako cienkościenne elementy powłokowe. W zależności od dokładności stosowanej teorii płyt można mówić o teorii liniowej [1] lub nieliniowej [2]. Niedawno, na skutek pewnej inspiracji wynikami pracy [3], udało się stworzyć teorię laminowania, która w oparciu o pewne dodatkowe założenia daje dokładniejszy obraz rzeczywistości, pozostając nadal liniową i nie tracąc wiele ze swojej prostoty. Poniżej przedstawiono skrótowo tworzenie takiej teorii, ze szczególnym zwróceniem uwagi na różnice w porównaniu z rozwiązaniem klasycznym.

Słowa kluczowe: laminat, kompozyt, średni kąt ugięcia, równanie konstytutywne, wpływ ścinania, wytrzymałość

MODIFICATION OF THE LINEAR THEORY OF LAMINATION

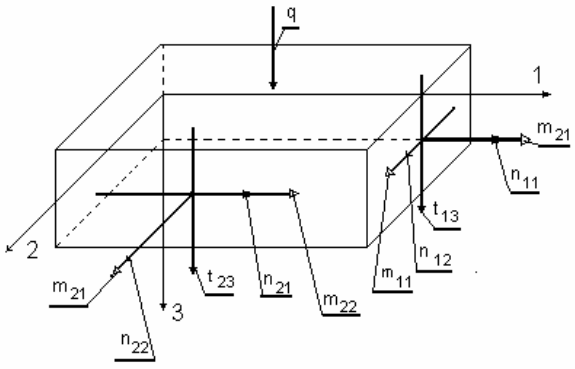
This is an improved and shortened version of the Authors lecture at the IV School of Composites, held at Wisla on 8-10 December, 2003. The theory of lamination, known sometimes as meso-mechanics of composites is dealing with prediction of properties of multi-layered composites, providing means for their practical applications. In the case of fibrous, polymeric laminates for this purpose usually the classical, linear theory of plates is employed, basing on the fact, that composite structures in general are constructed as thin-walled plates and shells. In such a case the results are greatly simplified in comparison with non-linear theories, while introduced in this way discrepancies are mostly of no significance. The final effect of application of the theory of lamination is providing global constitutive equations for the laminate and means for calculations of local stresses in particular layers. Some time ago the paper [3] gave an inspiration for forming a new, linear theory of lamination, based not on response to curvatures of the layers but their mean angle of deflection, taking into account values resulting from inter-laminar shear. The derivation of the theory, presented in this paper allows for calculation and inclusion of shear stresses into strength and safety factor calculations, better understanding of the problems of lamination and a tool for more accurate determination of laminate deflections.

Key words: lamination, composites, constitutive equations, shear stress influence

ZAŁOŻENIA

Rozważa się element płytowy, będący modelem badanego kompozytu w pewnym układzie współrzędnych, obciążony siłami i momentami płytowymi oraz obciążeniem ciągłym na górnej powierzchni, jak to przedstawiono na rysunku 1. Płyta, modelująca kompozyt, składa się z n różnie ułożonych warstw, na ogół o różnych właściwościach. Do wprowadzenia modyfikacji teorii laminowania, a w szczególności do użytej teorii płyt, potrzebne są pewne założenia, zestawione poniżej. Jak widać, nie odbiegają one w sposób zasadniczy od założeń klasycznej teorii płyt:

- Siły tarczowe w laminacie wywołane są wyłącznie przez warunki brzegowe
- Laminat jest symetryczny względem swej warstwy średniej
- Osie sprężystości laminatu pokrywają się z jego osiami symetrii
- Przemieszczenie pionowe laminatu jest funkcją jedynie x_1 i x_2

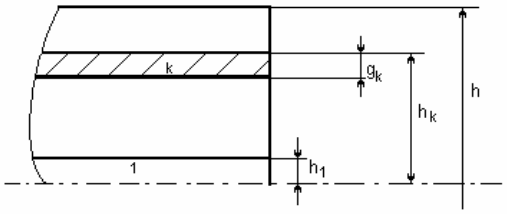


Rys. 1. Siły normalne, siły poprzeczne i momenty w laminacie
Fig. 1. Laminate normal and transverse forces and bending moments

[1] prof. dr hab. inż.

- Przemieszczenie poziome laminatu spowodowane jest jego krzywizną, powiększoną o uśredniony kąt odkształcenia postaciowego
- Badaniu podlegają małe odkształcenia sprężyste
- Naprężenia tarczowe w laminacie nie wpływają na naprężenia płytowe

Sposób oznaczeń i wymiarowania laminatu pokazuje rysunek 2. Nie ma to oczywiście istotnego wpływu na wyniki, tradycja jednak i prostota taki właśnie opis preferują.

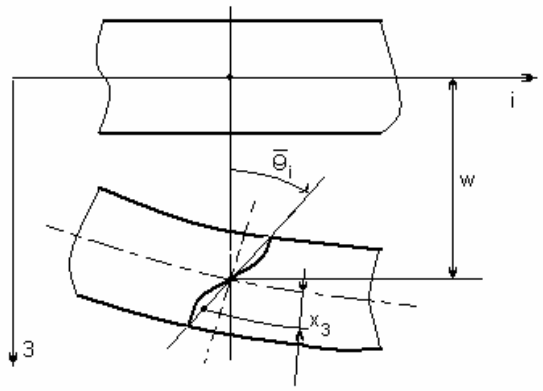


Rys. 2. Wymiarowanie warstw laminatu
Fig. 2. Numbering of laminate layers

W porównaniu z teorią klasyczną jedyną istotną różnicą w przedstawianym rozwiązaniu jest uwzględnienie wpływu uśrednionego kąta odkształcenia postaciowego na wartość naprężeń. Przemieszczenia w badanym układzie można więc zapisać jako:

$$\begin{aligned} u_i &= u_i^o - \bar{\Theta}_i x_3 \\ \bar{\Theta}_i &= w_{,i} + \bar{\gamma}_{3i} \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie wielkości $u_i, w, \bar{\gamma}_{3i}$ nie zależą od współrzędnej x_3, a kąt γ_{3i} wywołany jest jedynie ścinaniem, natomiast ugięcia od zginania i ścinania się dodają do siebie. Sytuację taką przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Ugięcie i średni kąt ugięcia
Fig. 3. Deflection and mean angle of deflection

WARUNKI RÓWNOWAGI ELEMENTU

Warunki równowagi statycznej wymagają spełnienia równań:

$$\begin{aligned} n_{11,1} + n_{21,2} &= 0 \\ n_{12,1} + n_{22,2} &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Siły błonowe, wynikające z warunków brzegowych, nie będą dalej w tym rozważaniu brane pod uwagę. Warunki równowagi momentów płytowych dają:

$$\begin{aligned} m_{11,1} + m_{12,2} &= t_{13} \\ m_{21,1} + m_{22,2} &= t_{23} \\ t_{13,1} + t_{23,2} &= -q \end{aligned} \tag{3}$$

Wykorzystując równania (3), można też uzyskać globalne równanie równowagi elementu laminatu, niezależne od własności użytego materiału. W prostszych przypadkach może ono być wykorzystane podobnie jak odpowiednie równanie płyt, zapisane w siłach.
Siły tarczowe w laminacie definiuje się zazwyczaj jako

$$\begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{22} \\ n_{12} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} dx_3 \tag{4}$$

Podobnie definiuje się momenty płytowe

$$\begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} x_3 dx_3 \tag{5}$$

oraz płytowe siły poprzeczne

$$\begin{bmatrix} t_{13} \\ t_{23} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} dx_3 \tag{6}$$

O wynikach teorii laminowania w większym stopniu decydują odkształcenia, związane z nimi założenia oraz równania konstytutywne materiału.

ANALIZA ODKSZTAŁCEŃ I NAPRĘŻEŃ

Zgodnie z przedstawionymi założeniami i zapisem (1), odkształcenia w płaszczyźnie laminatu można przedstawić związkami:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{11}^o - \bar{\Theta}_{11} \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_{22}^o - \bar{\Theta}_{22} \\ \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{12}^o - \bar{\Theta}_{12} \end{aligned} \tag{7}$$

gdzie

$$\bar{\Theta}_{lm} = \frac{1}{2}\left(\bar{\Theta}_{l,m} + \bar{\Theta}_{m,l}\right) \tag{8}$$

Oprócz powyżej wymienionych na grubości płyty występują odkształcenia postaciowe, wywołane siłami poprzecznymi:

$$\gamma_{31} = 2\varepsilon_{31}$$
$$\gamma_{32} = 2\varepsilon_{32} \tag{9}$$

Wielkości te, przy użyciu równań, zwanych czasem związkami konstytutywnymi materiału, pozwalają na powiązanie obciążeń i odkształceń globalnych laminatu. Jeżeli przyjąć równania konstytutywne w postaci

$$\sigma_{ij} = C_{ijlm}\varepsilon_{lm} \tag{10}$$

można wówczas, na podstawie (4) i (5) oraz podstawiając do tych związków (7) i (8), a także biorąc pod uwagę, że wyrażenia $\overline{\Theta}_{lm}$ są wartościami średnimi, niezależnymi od x_3, napisać związki zwane czasem niesłusznie „związkami konstytutywnymi" teorii laminatów:

$$n_{ij} = A_{ijlm}\varepsilon^o_{lm} - B_{ijlm}\overline{\Theta}_{l,m}$$
$$m_{ij} = B_{ijlm}\varepsilon^o_{lm} - D_{ijlm}\overline{\Theta}_{l,m} \tag{11}$$

gdzie A_{ijlm}, B_{ijlm} i D_{ijlm} można zapisać w sposób jawny jako:

$$A_{ijlm} = 2\sum_k C^{(k)}_{ijlm} g_k$$
$$B_{ijlm} = 2\sum_k C^{(k)}_{ijlm} g_k h_k \tag{12}$$
$$D_{ijlm} = \frac{2}{3}\sum_k C^{(k)}_{ijlm}\left(h_k^3 - h_{k-1}^3\right)$$

Wykorzystanie (11) i (12) pozwala zapisać odpowiednik równań konstytutywnych dla laminatu w postaci

$$\begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{22} \\ n_{12} \\ m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^o_{11} \\ \varepsilon^o_{22} \\ \varepsilon^o_{12} \\ \overline{\Theta}_{11} \\ \overline{\Theta}_{22} \\ \overline{\Theta}_{12} \end{bmatrix} \tag{13}$$

gdzie macierze **A**, **B**, **D** utworzono przy użyciu (12). Otrzymane związki różnią się od tych z klasycznej teorii laminowania przez zastąpienie krzywizn laminatu przez dotychczas nieokreślone kąty ugięcia $\overline{\Theta}_{lm}$. Dalsze rozważania idą więc w kierunku określenia wielkości tych kątów i w celu ich uproszczenia będzie się badać jedynie zagadnienia dotyczące zginania, używając zależności:

$$\sigma^{(k)}_{ij} = -C^{(k)}_{ijlm} w_{,lm} x_3$$
$$m_{ij} = D_{ijlm} w_{,lm} \tag{14}$$

przy czym k odnosi się tu do numeru warstwy.

SIŁY POPRZECZNE I MOMENTY PŁYTOWE

W przypadku ograniczenia rozważań do zagadnień zginania, wykorzystując (11) i (14), otrzymuje się układ równań:

$$m_{11} = -\left(D_{1111}w_{,11} + D_{1122}w_{,22}\right)$$
$$m_{22} = -\left(D_{1122}w_{,11} + D_{2222}w_{,22}\right) \tag{15}$$
$$m_{12} = -2D_{1212}w_{,12}$$

i podobnie dla sił poprzecznych:

$$t_{31} = -\left[D_{1111}w_{,11} + \left(D_{1122} + 2D_{1212}\right)w_{,22}\right]_{,1}$$
$$t_{32} = -\left[\left(D_{1122} + 2D_{1212}\right)w_{,11} + D_{2222}w_{,22}\right]_{,2} \tag{16}$$

Stosunkowo łatwo znajduje się zależności odwrotne na wyrażenia krzywizn, jednak całe obliczenia raczej należałoby wykonywać na drodze numerycznej, otrzymując ostatecznie:

$$w_{,11} = \frac{1}{\Delta}\left(m_{22}D_{1122} - m_{11}D_{2222}\right)$$
$$w_{,22} = \frac{1}{\Delta}\left(m_{11}D_{1122} - m_{22}D_{1111}\right) \tag{17}$$
$$w_{,12} = -\frac{m_{12}}{2D_{1212}}$$
$$\Delta = D_{1111}D_{2222} - D^2_{1122}$$

RÓWNANIE UGIĘCIA

Na podstawie powyżej przedstawionych rozważań można zbudować równanie ugięcia modelu laminatu. Jeżeli całkowite ugięcie oznaczyć przez $\tilde{w}$, wówczas zgodnie z założeniem o uwzględnianiu wpływu sił poprzecznych na ugięcie przez wprowadzenie uśrednionego kąta odkształcenia postaciowego można napisać

$$\tilde{w}_{,i} = w_{,i} + \overline{\gamma}_{3i} \tag{18}$$

Wykorzystanie równań (16) i (3) prowadzi ostatecznie do wyrażenia, które uwzględnia wpływ sił poprzecznych

$$D_{1111}w_{,1111} + 2(D_{1122} + 2D_{1212})w_{,1122} + D_{2222}w_{,2222} =$$
$$= q + [D_{1111}\overline{\gamma}_{31,11} + (D_{1122} + 2D_{1212})\overline{\gamma}_{31,22}]_{,1} + \tag{19}$$
$$+ [(D_{1122} + 2D_{1212})\overline{\gamma}_{32,11} + D_{2222}\overline{\gamma}_{32,22}]_{,2}$$

Wyzerowanie występujących tu nawiasów kwadratowych prowadzi do równania nieuwzględniającego wpływu sił poprzecznych na ugięcie, identycznego z klasycznym równaniem ugięcia płyt anizotropowych. Do jego wykorzystania jednak w pełnej formie niezbędne jest określenie uśrednionych wartości kątów odkształcenia postaciowego.

NAPRĘŻENIA STYCZNE I POPRZECZNE

Do wyznaczenia wartości naprężeń stycznych można użyć dwóch pierwszych równań równowagi wewnętrznej, które w przypadku braku sił masowych przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \sigma_{13,3} &= -\left(\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2}\right) \\ \sigma_{23,3} &= -\left(\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2}\right) \end{aligned} \tag{20}$$

Z równań konstytutywnych wynikają wyrażenia naprężeń, obowiązujące w warstwie k:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)} &= -\left(C_{1111}^{(k)} w_{,11} + 2C_{1112}^{(k)} w_{,12} + C_{1122}^{(k)} w_{,22}\right) x_3 \\ \sigma_{22}^{(k)} &= -\left(C_{1122}^{(k)} w_{,11} + 2C_{2212}^{(k)} w_{,12} + C_{2222}^{(k)} w_{,22}\right) x_3 \\ \sigma_{12}^{(k)} &= -\left(C_{1211}^{(k)} w_{,11} + 2C_{1212}^{(k)} w_{,12} + C_{1222}^{(k)} w_{,22}\right) x_3 \end{aligned} \tag{21}$$

Pozwala to zapisać równania (20) w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_{13,3}^{(k)} &= K_1^{(k)} x_3 \\ \sigma_{23,3}^{(k)} &= K_2^{(k)} x_3 \end{aligned} \tag{22}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} K_1^{(k)} &= (C_{1111}^{(k)} w_{,11} + 2C_{1112}^{(k)} w_{,12} + C_{1122}^{(k)} w_{,22})_{,1} + \\ &+ (C_{1211}^{(k)} w_{,11} + 2C_{1212}^{(k)} w_{,12} + C_{1222}^{(k)} w_{,22})_{,2} \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} K_2^{(k)} &= (C_{1211}^{(k)} w_{,11} + 2C_{1212}^{(k)} w_{,12} + C_{1222}^{(k)} w_{,22})_{,1} + \\ &+ (C_{1122}^{(k)} w_{,11} + 2C_{2212}^{(k)} w_{,12} + C_{2222}^{(k)} w_{,22})_{,2} \end{aligned}$$

Wynika z tego, że naprężenia styczne w warstwie, pochodzące od sił poprzecznych, mają rozkład paraboliczny, gdyż całkując (22) względem x_3 otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(k)} &= C_1^{(k)} + \frac{1}{2} K_1^{(k)} x_2^2 \\ \sigma_{23}^{(k)} &= C_2^{(k)} + \frac{1}{2} K_2^{(k)} x_3^2 \end{aligned} \tag{24}$$

gdzie $C_1^{(k)}$ i $C_2^{(k)}$ są stałymi całkowania. Pozwala to na wyznaczenie wartości sił poprzecznych, zgodnie z (6), po porównaniu z (16) otrzymując ostatecznie:

$$\begin{aligned} \sum_k C_1^{(k)} g_k &= \frac{3}{4} t_{13} \\ \sum_k C_2^{(k)} g_k &= \frac{3}{4} t_{23} \end{aligned} \tag{25}$$

Równowaga na powierzchni styku dwóch warstw laminatu wymaga, aby

$$C_i^{(k)} + K_i^{(k)} h_{k-1}^2 = C_i^{(k-1)} + K_i^{(k-1)} h_{k-1}^2$$

Prowadzi to do zależności rekurencyjnej

$$C_i^{(k)} = C_i^{(k-1)} - \left(K_i^{(k)} - K_i^{(k-1)}\right) h_{k-1}^2 \tag{26}$$

Zauważając, że na powierzchni zewnętrznej laminatu naprężenie jest zerowe, czyli

$$C_i^{(n)} + K_i^{(n)} h_n^2 = 0$$

znajduje się ostatecznie wyrażenie na stałe całkowania w postaci

$$C_i^{(k)} = \sum_l^{n-1} \left(K_i^{(l+1)} - K_i^{(l)}\right) h_l^2 - K_i^{(n)} h_n^2 \tag{27}$$

Można teraz łatwo wywnioskować, że ze względu na zmianę paraboliczną wzdłuż grubości naprężenie styczne musi być ograniczone

$$C_i^{(k)} + K_i^{(k)} h_k^2 \le \sigma_{i3}^{(k)} \le C_i^{(k)} + K_i^{(k)} h_{k-1}^2$$

Prowadzenie dalszych obliczeń na drodze symbolicznej jest praktycznie rzecz biorąc niewykonalne i niecelowe. Wystarczy jednak stwierdzić, że przedstawione zależności pozwalają wyznaczyć rozkłady naprężeń w poszczególnych warstwach, uzupełniając w ten sposób zależności teorii laminowania.

Ostatnią wielkością, potrzebną do obliczeń, jest uśredniony kąt odkształcenia postaciowego, który można zdefiniować jako

$$\overline{\gamma}_{i3} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\sigma_{i3}^{(k)}}{G_{i3}^{(k)}} dx_3 \tag{28}$$

gdzie $G_{i3}^{(k)}$ oznacza odpowiedni moduł Kirchhoffa. Wykonując całkowanie, znajduje się ostatecznie

$$\overline{\gamma}_{i3} = 2\sum_k \frac{C_i^{(k)} g_k}{G_{i3}^{(k)} h} + \frac{2}{3} \sum_k \frac{K_i^{(k)}}{G_{i3}^{(k)} h} \left(h_k^3 - h_{k-1}^3\right) \tag{29}$$

co pozwala na ostateczne napisanie równania ugięcia laminatu w sposób jawny. Dodatkowo, w celu ewentualnego wykorzystania przy obliczaniu wytężenia, za

pomocą dotychczas wykorzystanych zależności, można określić wartość naprężeń poprzecznych σ_{33}.

Ostatnie, niewykorzystane dotychczas równanie równowagi wewnętrznej, przy takich jak poprzednio założeniach, można zapisać w postaci

$$\sigma_{33,3} = -\left(\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2}\right) \tag{30}$$

Obie wielkości w nawiasie zostały już uprzednio określone, można więc napisać

$$\sigma_{33,3}^{(k)} = -\left(C_k + \frac{1}{2} K_k x_3^2\right) \tag{31}$$

gdzie zgodnie z poprzednimi oznaczeniami:

$$\begin{aligned} C_k &= C_{1,1}^k + C_{2,2}^k \\ K_k &= K_{1,1}^k + K_{2,2}^k \end{aligned} \tag{32}$$

Ostatecznie, dokonując całkowania wyrażenia (31), znajduje się rozkład naprężeń poprzecznych w laminacie jako

$$\sigma_{33}^{(k)} = C^k - C_k x_3 - \frac{1}{6} K_k x_3^3 \tag{33}$$

gdzie C^k oznacza stałą całkowania, którą należy wyznaczyć z warunków naprężeniowych na granicach warstw laminatu. Wartość tego naprężenia jest zazwyczaj pomijalna.

Przedstawione powyżej rozważania, mimo że dość proste, nadają się do obliczeń praktycznych jedynie przy użyciu metod komputerowych. Próby obliczeń symbolicznych czy ich wykonywanie ręczne może łatwo doprowadzić do błędów i pomyłek.

LITERATURA

[1] Christensen R.M., Mechanics of Composite Materials, Wiley 1979.

[2] Reissner E., The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, Journal of Applied Mechanics 1945, 12, 1769-1777.

[3] Yungian Qi, Knight N.F.Jr., A Refined First Order Shear - Deformation Theory and its Justification by Plane - Strain Bending of Laminated Plates, International Journal of Solids and Structures 1996, 33, 1, 49-64.

Recenzent
Kazimierz Puciłowski